- Prekidačke funkcije -

Predstavljanje prekidačkih funkcija Bulovim izrazima
ili
Analitičke forme za predstavljanje prekidačkih funkcija

Bulovi izrazi

- $0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ su Bulovi izrazi
- Ako su E_1 i E_2 Bulovi izrazi, tada su i

  $E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2, \overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$

  takodje Bulovi izrazi.
- Bulov izraz se može konstruisati samo primenom prethodnih pravila konačan broj puta.

Prekidačke funkcije predstavljene Bulovim izrazima

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_2}x_3$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}(\overline{x_2} + x_3)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}x_3}$$

Elementarni proizvodi i elementarne sume

- Uvedimo oznaku $\widetilde{x}$ za promenljivu ili njen komplement.
- Bulov izraz oblika $\widetilde{x}_{j_1}\widetilde{x}_{j_2}\ldots\widetilde{x}_{j_k}$ (gde su $j_1, j_2, \ldots, j_n$ različiti brojevi iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$) se naziva elementarnim proizvodom.
- Bulov izraz oblika $\widetilde{x}_{j_1}+\widetilde{x}_{j_2}+\ldots+\widetilde{x}_{j_k}$ se naziva elementarnom sumom.

Primeri elementarnih proizvoda i elementarnih suma

- Neki elementarni proizvodi 3 promenljive:

$$x_1, \quad \overline{x_2}, \quad \overline{x_1} x_3, \quad x_1 \overline{x_2} x_3$$

- Neke elementarne sume 3 promenljive:

$$x_1, \quad \overline{x_2}, \quad \overline{x_1} + x_3, \quad x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

Potpuni proizvodi i potpune sume

- Elementarni proizvod u kojem učestvuju sve promenljive se naziva potpunim proizvodom ili mintermom.
- Elementarna suma u kojoj učestvuju sve promenljive se naziva potpunom sumom ili makstermom.

Primeri potpunih proizvoda i potpunih suma

- Neki potpunii proizvodi 3 promenljive:

$$x_1\overline{x_2}x_3, \quad \overline{x_1}x_2x_3, \quad x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

- Neke potpune sume 3 promenljive:

$$x_1+\overline{x_2}+x_3, \quad \overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3$$

Osobine potpunih proizvoda i potpunih suma

- Potpuni proizvod ima vrednost 1 samo na jednom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$.
  - Primer: Potpuni proizvod $x_1 x_2 x_3$ ima vrednost 1 na vektoru 101.

- Potpuna suma ima vrednost 0 samo na jednom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$.
  - Primer: Potpuna suma $x_1 + x_2 + x_3$ ima vrednost 0 na vektoru 010.

Potpuna disjunktivna normalna forma funkcije (PDNF)

- Svaka prekidačka funkcija (osim konstante 0) se može predstaviti kao suma potpunih proizvoda koji imaju vrednost 1 na onim vektorima na kojima i funkcija ima vrednost 1.
- Ovakav Bulov izraz se naziva potpunom disjunktivnom normalnom formom ili savršenom disjunktivnom normalnom formom.

Potpuna konjuktivna normalna forma funkcije (PKNF)

- Svaka prekidačka funkcija (osim konstante 1) se može predstaviti kao proizvod potpunih suma koje imaju vrednost 0 na onim vektorima na kojima i funkcija ima vrednost 0.
- Ovakav Bulov izraz se naziva potpunom konjuktivnom normalnom formom ili savršenom konjuktivnom normalnom formom.

Primer

- Funkciju predstavljenu tablicom istinitosti zapisati u obliku PKNF i PDNF.

$x_1x_2x_3$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

Prekidačke funkcije jedne i dve promenljive

Bulove operacije

- Prekidačke funkcije jedne i dve promenljive se nazivaju elementarnim funkcijama ili Bulovim operacijama.
- Skup prekidačkih funkicja pomoću kojih može da se obrazuje bilo koja prekidačka funkcija se naziva bazis.
- U praksi se kao bazisi uglavnom koriste Bulove operacije.

Prekidačke funkcije jedne promenljive (unarne Bulove operacije)

x	0 1	Naziv operacije	Oznaka	Bulov izraz
f_0	0 0	Konstanta 0	0	0
f_1	0 1	Promenljva x	x	x
f_2	1 0	Negacija	$\overline{x}$	$\overline{x}$
f_3	1 1	Konstanta 1	1	1

Prekidačke funkcije dve promenljive (binarne Bulove operacije)

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Naziv operacije	Oznaka	Bulov izraz
f_0	0 0 0 0	Konstanta 0	0	0
f_1	0 0 0 1	Konjukcija, Logičko I	$x_1 x_2$	$x_1 x_2$
f_2	0 0 1 0	Zabrana po x_2	$x_1 \Delta x_2$	$x_1 \overline{x_2}$
f_3	0 0 1 1	Promenljiva x_1	x_1	x_1
f_4	0 1 0 0	Zabrana po x_1	$x_2 \Delta x_1$	$\overline{x_1} x_2$
f_5	0 1 0 1	Promenljiva x_2	x_2	x_2

Prekidačke funkcije dve promenljive (binarne Bulove operacije)

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Naziv operacije	Oznaka	Bulov izraz
f_6	0 1 1 0	Suma po modulu 2, Isključivo ILI	$x_1 \oplus x_2$	$x_1\overline{x_2} \oplus \overline{x_1}x_2$
f_7	0 1 1 1	Disjunkcija, Logičko ILI	$x_1 + x_2$	$x_1 + x_2$
f_8	1 0 0 0	Pierce-ova strelica, NILI funkcija	$x_1 \downarrow x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$
f_9	1 0 01	Ekvivalencija	$x_1 \equiv x_2$	$x_1x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}$
f_{10}	1 0 1 0	Negacija x_2	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$

Prekidačke funkcije dve promenljive (binarne Bulove operacije)

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Naziv operacije	Oznaka	Bulov izraz
f_{11}	1 0 1 1	Implikacija od x_2 ka x_1	$x_2 \rightarrow x_1$	$x_1 + \overline{x_2}$
f_{12}	1 1 0 0	Negacija x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
f_{13}	1 1 0 1	Implikacija od x_1 ka x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$\overline{x_1} + x_2$
f_{14}	1 1 1 0	Sheffer-ova crtica, NI funkcija	$x_1 \mid x_2$	$\overline{x_1 x_2}$
f_{15}	1 1 1 1	Konstanta 1	1	1

Analitičke forme za predstavljanje prekidačkih funkcija koje koriste operaciju $\oplus$

Potpuna polinomna normalna forma funkcije (PPNF)

- Svaka prekidačka funkcija (osim konstante 1) se može predstaviti kao suma po modulu 2 potpunih proizvoda koji imaju vrednost 1 na onim vektorima na kojima i funkcija ima vrednost 1.
- Ovakav Bulov izraz se naziva potpunom polinomnom normalnom formom ili savršenom polinomnom normalnom formom.

Polinom po modulu 2

- Svaka prekidačka funkcija se može predstaviti u obliku:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots c_n x_n \\
\oplus c_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus c_{1n} x_{1n} \\
\oplus c_{123} x_1 x_2 x_3 \oplus \ldots \oplus c_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n
\end{aligned}
$$

- Ovakav Bulov izraz se naziva polinomom po modulu 2 ili kanoničkim polinomom.
- Polinom po modulu 2 se može dobiti iz potpune polinomne normalne forme tako što se svaka negacija $\overline{x_i}$ zameni izrazom $x_i \oplus 1$

Primer

- Funkciju predstavljenu tablicom istinitosti zapisati u obliku PPNF i polinoma po modulu 2.

$$f(x_1, x_2, x_2) =$$

$$x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$

$x_1 x_2 x_3$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0